ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CAO VĂN THÀNH

ĐƯỜNG CÔNIC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG CÔNIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

CAO VĂN THÀNH

ĐƯỜNG CÔNIC VÀ MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ ĐƯỜNG CÔNIC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS.TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

Lời nói đầu

Trong chương trình Toán phổ thông nói chung, các dạng bài tập, đề thi học sinh giỏi, đề thi tuyển sinh đại học, cao đẳng nói riêng ta thường gặp một số bài toán về elip, hypebol và parabol. So với các bài toán về đường thẳng, đường tròn, các bài toán về ba đường cônic tuy có mặt không nhiều trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng những năm gần đây, nhưng nó là một chủ đề không thể thiếu được trong việc ôn luyện thi học sinh giỏi, ôn luyện thi môn toán vào các trường Đại học, Cao đẳng. Tuy nhiên một số học sinh chưa khai thác có hiệu quả mảng bài tập này, lý do chính là các em chưa nắm được các dạng bài tập và cách vận dụng kiến thức về đường cônic để giải bài toán.

Hiện nay một số học viên cao học chuyên nghành Phương pháp toán sơ cấp của trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên cũng đã khai thác có hiệu quả một số vấn đề liên quan đến đường cônic, ví dụ như Hoàng Văn Trọng với luận văn "Những bài toán tổng hợp về các đường cônic". Luận văn của Hoàng Văn Trọng tập trung vào các vấn đề liên quan đến đường cônic thông qua các bài toán tổng hợp trong chương trình toán THPT, chưa đi sâu tìm hiểu về một số nội dung có trong chuyên đề dành cho học sinh giỏi, học sinh chuyên toán THPT.

Với mong muốn tìm hiểu, học hỏi và tích lũy thêm kinh nghiệm để phục vụ ngay chính công tác giảng dạy Toán ở trường THPT, tôi chọn hướng nghiên cứu làm luận văn Thạc sĩ với đề tài: " Đường cônic và một số dạng toán về đường cônic". Một số kiến thức, bài tập được trình bầy trong luận văn có trong một số chuyên đề dành cho học sinh chuyên toán và nằm ngoài chương trình sách giáo khoa THPT. Cấu trúc của luận văn: Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn được chia làm hai chương

Chương 1: Trình bày một số vấn đề về xác định đường cônic, phương trình tiếp tuyến của đường cônic, phương tích của một điểm đối với một đường cônic, đường đẳng phương của hai đường cônic, điều kiện cần và đủ để đường thẳng tiếp xúc với đường cônic.

Chương 2: Trình bày một số dạng toán về đường cônic như: Đồng nhất thức cho đa giác nội tiếp đường cônic, bài toán về tam giác, tứ giác nội tiếp trong một đường cônic, khoảng cách từ một đường cônic đến đường thẳng, tham số hóa đường cônic, bài toán quỹ tích...

Do thời gian có hạn nên luận văn này chủ yếu chỉ dừng lại ở việc tìm hiểu, tập hợp tài liệu, sắp xếp và trình bày các kết quả nghiên cứu có sẵn theo chủ đề đặt ra với những lập luận, diễn giải đơn giản, dễ hiểu nhất có thể với nhiều ví dụ và bài toán minh họa phong phú, cụ thể.

Nhân dịp này, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn PGS. TS. Trịnh Thanh Hải, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm khoa Toán- Tin, cùng các GS, PGS, TS đã tham gia giảng dạy và tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu. Đồng thời tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Thái Nguyên, Ban Giám hiệu Trường THPT Trần Quốc Tuấn, huyện Đồng Hỷ, tỉnh Thái Nguyên, tập thể lớp cao học Toán K8A (khóa 2014-2016) đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Thái Nguyên, ngày 26 tháng 5 năm 2016

Tác giả luận văn

Cao Văn Thành

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương 1 ngoài việc điểm qua một số khái niệm, tính chất cơ bản về đường cônic, chương 1 sẽ trình bầy thêm một số khái niệm, tính chất không được trình bầy trong sách giáo khoa phổ thông, các khái niệm, tính chất này được tiếp cận từ góc độ toán cao cấp nhằm cung cấp thêm công cụ để giải quyết các bài toán khó, dạng mới về đường cônic.

1.1 Vấn đề xác định đường cônic

1.1.1 Lý thuyết chung

Định nghĩa 1.1.1. *Cho đường thẳng Δ. Xét một đường thẳng ℓ cắt Δ tại O và không vuông góc với Δ. Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng ℓ khi quay quanh Δ gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón).*

Δ gọi là trục của mặt nón.
ℓ gọi là đường sinh của mặt nón.
O gọi là đỉnh của mặt nón.

Nhận xét 1.1.2. Khoảng thế kỷ thứ ba trước công nguyên, nhà toán học Apollonius đã chứng minh được rằng:

Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi một mặt phẳng (P) không đi qua đỉnh của mặt nón thì giao tuyến sẽ là

a) Một đường elip nếu $mp(P)$ cắt mọi đường sinh (đặc biệt, nếu (P) vuông góc với trục của mặt nón thì giao là đường tròn).

b) Một đường parabol nếu $mp(P)$ song song với chỉ một đường sinh.

c) Một đường hypebol nếu $mp(P)$ song song với hai đường sinh.

Chính vì vậy các giao tuyến đó có tên gọi là đường cônic.

Phương trình chính tắc của ba đường cônic là những phương trình bậc hai đối với x, y. Đó cũng là các trường hợp riêng của đường bậc hai trong mặt phẳng có dạng

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0.

1.1.2 Đường bậc hai và phương trình chính tắc

Trong một hệ trục tọa độ vuông góc Rene' Descartes Oxy, ta xét một đường bậc hai có phương trình tổng quát

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

các hệ số A, B, C không đồng thời bằng 0.

Sau đây ta tìm tất cả các đường bậc hai dạng chính tắc cho bởi (1).

Dùng phép quay tâm O, góc quay α biến hệ trục tọa độ Oxy thành hệ trục tọa độ $Ox'y'$, theo công thức đổi tọa độ

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \tag{2}$$

Khi đó $M(x; y)$ đối với hệ trục tọa độ cũ sẽ có tọa độ $(x'; y')$ đối với hệ trục tọa độ mới $Ox'y'$, thay (2) vào (1) ta được phương trình của đường bậc hai đã cho trong hệ tọa độ mới có dạng

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \tag{3}$$

Trong đó

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha.\sin\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$\begin{aligned} B' &= -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha$$

$$E' = E\cos\alpha - D\sin\alpha$$

Nếu $B \neq 0$ ta có thể chọn α để $B' = 0$ bằng cách giải phương trình

$$\frac{1}{2}(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cot 2\alpha = \frac{A - C}{2B} \tag{4}$$

Vậy nếu trong phương trình (1), $B \neq 0$ thì bằng cách quay hệ trục tọa độ góc α thỏa mãn điều kiện (4) ta đưa phương trình (3) về dạng

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0 \qquad (5)$$

Xét các trường hợp trong phương trình (5)

1) Nếu $A' \neq 0$, $C' \neq 0$ khi đó (5) được viết lại như sau

$$A'(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}x') + C'(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y') + F = 0$$

Hay

$$A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 + F - \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 - \left(\frac{E'}{C'}\right)^2 = 0 \qquad (6)$$

Dùng phép tịnh tiến

$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{D'}{A'} \\ y = y' + \dfrac{E'}{C'} \end{cases}$$

Khi đó phương trình (6) trở thành

$$A'x^2 + C'y^2 = F' \qquad (7)$$

Trong đó

$$F' = -F + \left(\frac{D'}{A'}\right)^2 + \left(\frac{E'}{C'}\right)^2$$

a) Nếu $A' > 0, C' > 0, F' > 0$, đặt $\dfrac{F'}{A'} = a^2$, $\dfrac{F'}{C'} = b^2$ thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta được phương trình chính tắc của đường elip.

b) Nếu $A' > 0, C' > 0, F' < 0$, đặt $-\dfrac{F'}{A'} = a^2$, $-\dfrac{F'}{C'} = b^2$ thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

không có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn phương trình.

c) Nếu $A' > 0, C' < 0, F' > 0$, đặt $\dfrac{F'}{A'} = a^2$, $-\dfrac{F'}{C'} = b^2$ thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta được phương trình chính tắc của đường hypebol.

d) Nếu $A' > 0, C' < 0, F' < 0$, đặt $\dfrac{F'}{A'} = a^2$, $\dfrac{F'}{C'} = b^2$ thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ta được phương trình chính tắc của đường hypebol.

e) Nếu $A' > 0, C' < 0, F' = 0$, thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

phương trình này xác định một cặp đường thẳng

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0\,; \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

chúng cắt nhau tại gốc tọa độ.

f) Nếu $A' > 0, C' > 0, F' = 0$, thì phương trình (7) trở thành

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

chỉ có một điểm thỏa mãn phương trình này, điểm đó chính là gốc tọa độ.

2) Nếu $A' \neq 0,\ C' = 0,\ E' \neq 0$ khi đó phương trình (5) được viết lại như sau

$$A'\left(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}x'\right) + 2E'\left(y' + \frac{F}{2E'}\right) = 0$$

Hay

$$A'\left(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}\right)^2 + 2E'\left(y' + \frac{F}{2E'} - \frac{D'^2}{2E'A'}\right) = 0 \tag{8}$$

Thực phép tịnh tiến tọa độ

$$\begin{cases} x = x' + \dfrac{D'}{A'} \\ y = y' + \dfrac{F}{2E'} - \dfrac{D'^2}{2E'A'} \end{cases}$$

Khi đó phương trình (8) có dạng

$$A'x^2 + 2E'y' = 0 \tag{9}$$

a) Nếu $A'E' < 0$, đặt $\dfrac{E'}{A'} = P$ thì phương trình (9) trở thành

$$x^2 = 2Py$$